Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Mathématiques : analyse et approches
Niveau moyen
Épreuve 1

Lundi 31 octobre 2022 (après-midi)

Numéro de session du candidat

1 heure 30 minutes

Instructions destinées aux candidats

- Écrivez votre numéro de session dans les cases ci-dessus.
- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Aucune calculatrice n'est autorisée pour cette épreuve.
- Section A : répondez à toutes les questions. Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet.
- Section B : répondez à toutes les questions sur le livret de réponses prévu à cet effet. Écrivez votre numéro de session sur la première page du livret de réponses, et attachez ce livret à cette épreuve d'examen et à votre page de couverture en utilisant l'attache fournie.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour les cours de mathématiques : analyse et approches** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[80 points]**.

9 pages

8822 – 7119

Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

Section A

Répondez à **toutes** les questions. Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet. Si cela est nécessaire, vous pouvez poursuivre votre raisonnement en dessous des lignes.

1. [Note maximale : 7]

Soit $f(x) = -2x + 3$, pour $x \in \mathbb{R}$.

(a) La représentation graphique d'une fonction affine g est parallèle à la représentation graphique de f et passe par l'origine. Trouvez une expression pour $g(x)$. [2]

(b) La représentation graphique d'une fonction affine h est perpendiculaire à la représentation graphique de f et passe par le point $(-1\,;\,2)$. Trouvez une expression pour $h(x)$. [3]

(c) Trouvez $(g \circ h)(0)$. [2]

2. [Note maximale : 4]

La fonction g est définie par $g(x) = \mathrm{e}^{x^2 + 1}$, où $x \in \mathbb{R}$.

Trouvez $g'(-1)$.

3. [Note maximale : 7]

Considérez un cercle de diamètre AB, où les coordonnées de A sont $(1\,;4\,;0)$ et les coordonnées de B sont $(-3\,;2\,;-4)$.

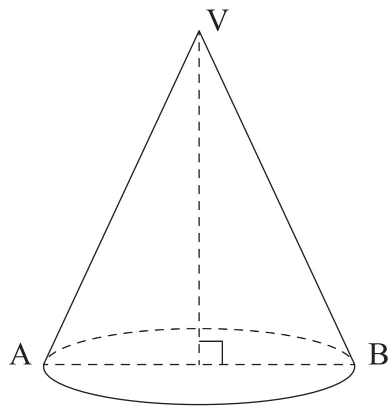
(a) Trouvez

(i) les coordonnées du centre du cercle ;

(ii) le rayon du cercle. [4]

Le cercle forme la base d'un cône droit dont les coordonnées du sommet V sont $(-1\,;-1\,;0)$.

la figure n'est pas à l'échelle



(b) Trouvez le volume exact du cône. [3]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

4. [Note maximale : 5]

Soit a une constante, où $a > 1$.

(a) Montrez que $a^2 + \left(\dfrac{a^2-1}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{a^2+1}{2}\right)^2$. [3]

Considérez un triangle rectangle dont les côtés mesurent a, $\left(\dfrac{a^2-1}{2}\right)$ et $\left(\dfrac{a^2+1}{2}\right)$.

(b) Trouvez une expression pour l'aire du triangle en fonction de a. [2]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

5. [Note maximale : 5]

La dérivée de la fonction f est donnée par $f'(x) = \dfrac{6x}{x^2+1}$.

La représentation graphique de $y = f(x)$ passe par le point $(1\,;\,5)$. Trouvez une expression pour $f(x)$.

6. [Note maximale : 6]

Les événements A et B sont tels que $\mathrm{P}(A) = 0{,}3$ et $\mathrm{P}(B) = 0{,}8$.

(a) Déterminez la valeur de $\mathrm{P}(A \cap B)$ dans le cas où les événements A et B sont indépendants. [1]

(b) Déterminez la valeur minimale possible de $\mathrm{P}(A \cap B)$. [3]

(c) Déterminez la valeur maximale possible de $\mathrm{P}(A \cap B)$, en justifiant votre réponse. [2]

N'écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

Section B

Répondez à **toutes** les questions sur le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page.

7. [Note maximale : 16]

(a) Le sommet de la représentation graphique d'une fonction du second degré f se situe au point $(3\,;2)$ et son point d'intersection avec l'axe des abscisses se situe en $x = 5$. Trouvez f, sous la forme $f(x) = a(x-h)^2 + k$. [3]

La fonction du second degré g est définie par $g(x) = px^2 + (t-1)x - p$, où $x \in \mathbb{R}$ et $p\,,\, t \in \mathbb{R}\,,\, p \neq 0$.

(b) Dans le cas où $g(-3) = g(1) = 4$,

(i) trouvez la valeur de p et la valeur de t ;

(ii) trouvez l'image de g. [7]

(c) La fonction affine j est définie par $j(x) = -x + 3p$, où $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}\,,\, p \neq 0$.

Montrez que les représentations graphiques de $j(x) = -x + 3p$ et $g(x) = px^2 + (t-1)x - p$ ont deux points d'intersection distincts pour toute valeur possible de p et t. [6]

8. [Note maximale : 15]

(a) Calculez la valeur de chacun des logarithmes suivants :

(i) $\log_2 \dfrac{1}{16}$;

(ii) $\log_9 3$;

(iii) $\log_{\sqrt{3}} 81$. [7]

(b) On sait que $\log_{ab} a = 3$, où $a\,,\, b \in \mathbb{R}^+,\, ab \neq 1$.

(i) Montrez que $\log_{ab} b = -2$.

(ii) À partir de là, trouvez la valeur de $\log_{ab} \dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}$. [8]

N'écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

9. [Note maximale : 15]

La fonction f est définie par $f(x) = \cos^2 x - 3\sin^2 x$, $0 \le x \le \pi$.

(a) Trouvez les racines de l'équation $f(x) = 0$. [5]

(b) (i) Trouvez $f'(x)$.

(ii) À partir de là, trouvez les coordonnées des points sur la représentation graphique de $y = f(x)$ où $f'(x) = 0$. [7]

(c) Esquissez la représentation graphique de $y = f(x)$, en montrant clairement les coordonnées de tout point où $f'(x) = 0$ et celles de tout point où la représentation graphique coupe les axes des coordonnées. [3]

Références :

Veuillez ne **pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page ne seront pas corrigées.

Veuillez ne **pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page ne seront pas corrigées.

Veuillez ne **pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page ne seront pas corrigées.